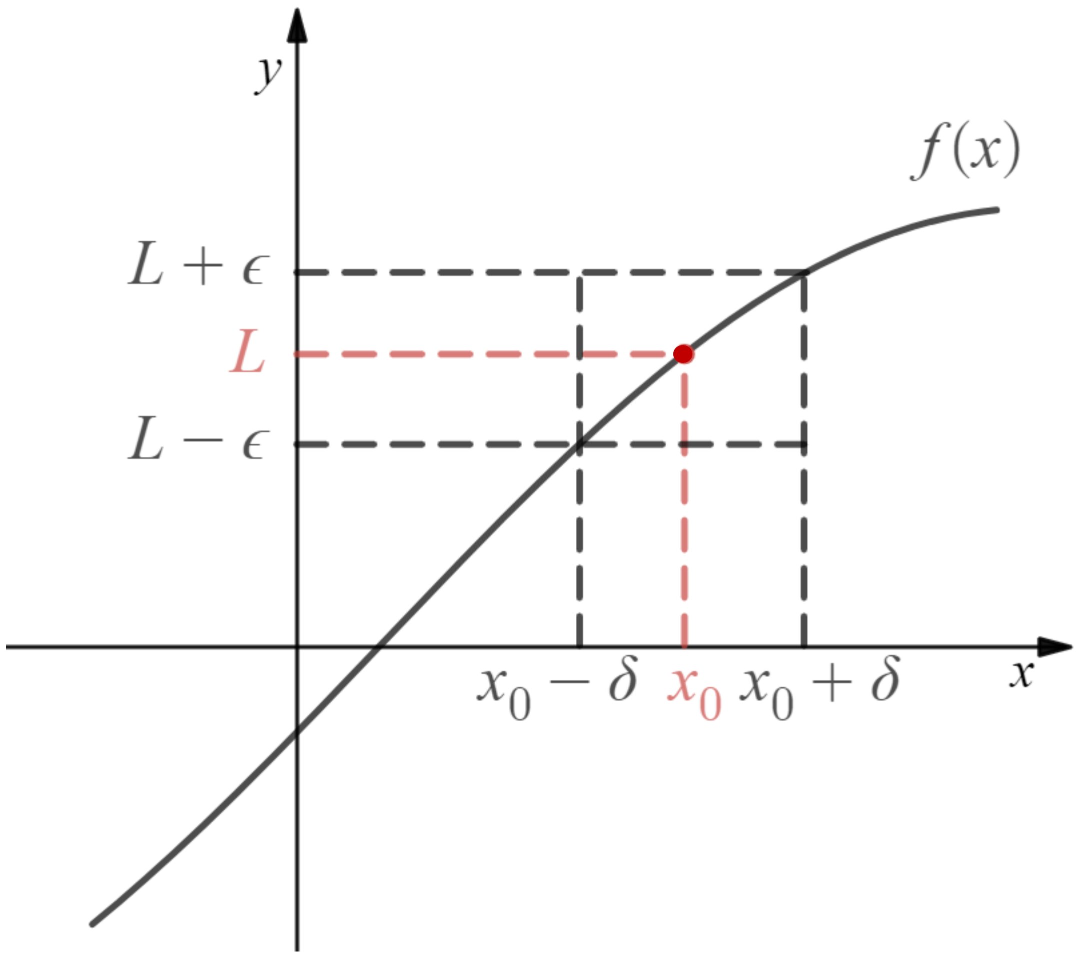
תקציר שיעור גבול של פונקציה

הגדרת הגבול

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. המספר L נקרא הגבול של $f\left(x\right)$ כאשר x שואף ל- x_0, אם לכל מספר $\varepsilon>0$ קיים מספר $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, מתקיים: $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

<u>סימון:</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ או בקצרה $f\left(x\right)\xrightarrow{x\to x_0} L$



הגדרה

סביבה של הנקודה x_0 היא הקטע הפתוח (a,b) המכיל את הנקודה x_0.

סביבה נקובה של נקודה x_0 היא הקטע הפתוח (a,b) המכיל את הנקודה x_0, ללא x_0 עצמה.

סביבה δ של x_0 היא הקטע הפתוח $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ לכל $\delta>0$.

סביבה δ נקובה של x_0 היא הקטע הפתוח ללא x_0 עצמה $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ לכל $\delta>0$.

משפט – גבול של פונקציה אלמנטרית

הפונקציות האלמנטריות מקיימות בתחום הגדרתן, שהגבול בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה,

כלומר מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

משפט יחידות הגבול

אם לפונקציה קיים גבול, אזי הוא יחיד.

משפטי גבול וערך מוחלט

א) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|L|$

ב) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$

משפט חסומה כפול אפסה

אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ו- $g(x)$ חסומה בסביבה נקובה של x_0, אזי: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

משפט הסנדביץ'

אם לכל x בסביבה נקובה של x_0 מתקיים: $h(x)\le f(x)\le g(x)$

ואם בנוסף $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$, אזי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

משפט הגבול המפורסם

מתקיים הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

משפט – אריתמטיקה של גבולות

<u>חוקים בסיסיים</u>

תהי פונקציה f המוגדרת בסביבת x_0 (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה) ובעלת גבול סופי

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ ויהי קבוע c כלשהו, אזי:

א) $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

ב) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(cf(x)\right)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cL$

<u>חוקים עיקריים</u>

תהיינה פונקציות f ו- g המוגדרות בסביבת x_0 (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה).

אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$ ו- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$, אזי:

א) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1+L_2$

ב) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1L_2$

ג) אם גם $L_2\neq 0$, אזי: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$

משפט התכנסות גוררת חסימות

א) אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, אזי f חסומה בסביבה נקובה של x_0.

ב) אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ <u>ובנוסף</u> f מוגדרת ב- x_0, אזי f חסומה בסביבת x_0.

משפט – אי-שיוויונות בין גבולות

<u>משפט 1</u>

תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של x_0

ונניח כי קיימים הגבולות: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

אם $L>M$, אזי יש סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x)>g(x)$.

<u>**מסקנה ראשונה**</u> $(g(x)=0)$

בפרט אם g פונקציה קבועה $g(x)=M$, נקבל שאם $L>M$, אזי יש סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x)>M$.

<u>**מסקנה שנייה**</u> $(M=0)$

ובפרט אם $M=0$, נקבל שאם $L>0$, אזי יש סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x)>0$.

<u>**משפט 2**</u>

תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של x_0

ונניח כי קיימים הגבולות: $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

אם $f(x)\geq g(x)$ לכל x בסביבה, אזי $L\geq M$.

<u>**מסקנה ראשונה**</u> $(g(x)=0)$

בפרט אם g פונקציה קבועה $g(x)=M$, נקבל שאם $f(x)\geq M$ לכל x בסביבה, אזי $L\geq M$.

<u>**מסקנה שנייה**</u> $(M=0)$

ובפרט אם $M=0$, נקבל שאם $f(x)\geq 0$ לכל x בסביבה, אזי $L\geq 0$.